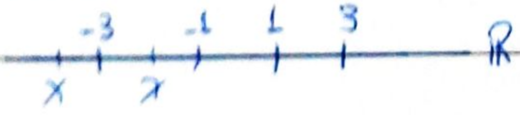
8/11/19

Συνάρτηση Κατανομής ή Αθροιστική Συνάρτηση Κατανομής (ασκ)

Ορισμός (ασκ): Έστω χπ $(S, \mathcal{A}, P)$. Η αθροιστική συνάρτηση κατανομής μιας τμ X συμβολίζεται με F_X και είναι μία πραγματική συνάρτηση που ορίζεται: $F_X(x) = P(X \le x), \forall x \in \mathbb{R}$ <=>
<=> P(όλων των τιμών της X που είναι $\le x, x \in \mathbb{R}$) $= F_X(x)$

Παράδειγμα:
Έστω τμ με τιμές $X = -3, -1, 1, 3$ και πιθανότητες $P(X=-3) = P(X=3) = \frac{1}{8}$, $P(X=-1) = P(X=1) = \frac{3}{8}$. Να προσδιοριστεί και να σχεδιαστεί η ασ.κ. της τ.μ. X.

Λύση:



• Έστω $x < -3$. Τότε, $F_X(x) = P(X \le 3) = P\left(\begin{array}{c}\text{όλων των τιμών} \\ \text{της τμ } X \text{ που είναι } \le 3\end{array}\right) =$
$= P(\varnothing) = 0$

• Έστω $-3 < x < -1$. Τότε $F_X(x) = P(X \le x) = P(X = -3) = 1/8$

• Έστω $-1 < x < 1$. Τότε $F_X(x) = P(X \le x) = P(X = 3$ ή $X = -1) =$

$= P(X=-3) + P(X=-1) = 4/8$

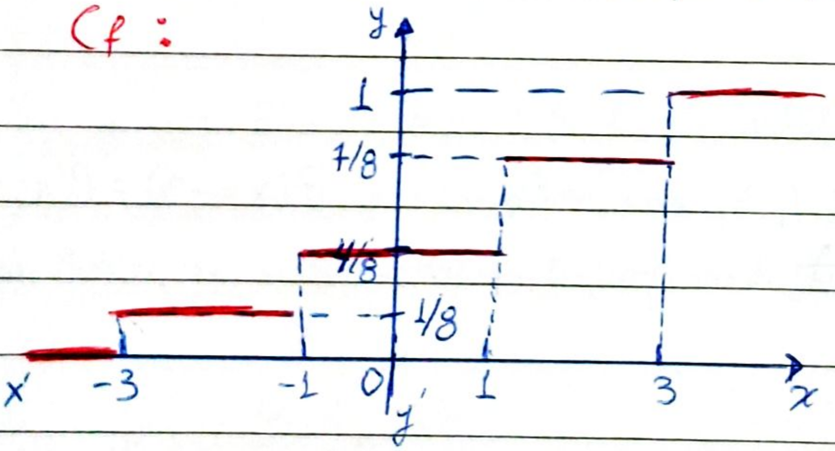
• Έστω $1 < x < 3$. Τότε $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=-3 \text{ ή } X=-1 \text{ ή } X=1) =$
$= P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=1) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$

• Έστω $3 < x$. Τότε, $F_X(x) = P(X \leq x) = P(X=-3 \text{ ή } X=-1 \text{ ή } X=1 \text{ ή } X=3)$
$= P(X=-3) + P(X=-1) + P(X=1) + P(X=3) = 1$

Συνοπτικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -3 \\ 1/8, & -3 < x < -1 \\ 4/8, & -1 \leq x < 1 \\ 7/8, & 1 \leq x < 3 \\ 1, & 3 < x \end{cases}$$

Cf :



Κλιμακωτή συνάρτηση.

Άσκηση:
Έστω τ.μ. X με τιμές $-1, 1, 2, 3$ και πιθανότητες $P(X=-1) = P(X=1) =$
$= 1/4$ και $P(X=2) = P(X=3) = 1/3$. $F_X(x) = ;$ + Να σχεδιαστεί.

Πρόταση (Ιδιότητες της ασκ):
Έστω F_X η ασκ μιας τ.μ. X. Τότε:

α) Η F_X είναι αύξουσα

β) Η F_X είναι συνεχής από δεξιά, δηλαδή

$\lim_{x\to a^+} F_X(x) \overset{ορ}{=} \lim_{n\to\infty} F_X(a+\cancel{\tfrac{1}{n}}^{\,0}) = F_X(a)$

γ) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} F_X(x) = 1$

<u>Παρατήρηση:</u> Οι α), β), γ) αποτελούν τις αναγκαίες συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιεί οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση ώστε να είναι α.σ.κ.

<u>Απόδειξη:</u>

α)

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x \le y$.

$\{X \le x\} \subseteq \{X \le y\} \Rightarrow P(X \le x) \le P(X \le y) \Rightarrow$

$\Rightarrow F_X(x) \le F_X(y)$

Άρα, F_X αύξουσα

<u>Άσκηση:</u>

ΝΔο οι πραγματικές συναρτήσεις που ορίζονται:

i) $F_X(x) = \begin{cases} 1-e^{-x}, & x \ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$, ii) $F_X(x) = \frac{1}{1+e^{x}}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι ασκ.

<u>Λύση:</u>

i)

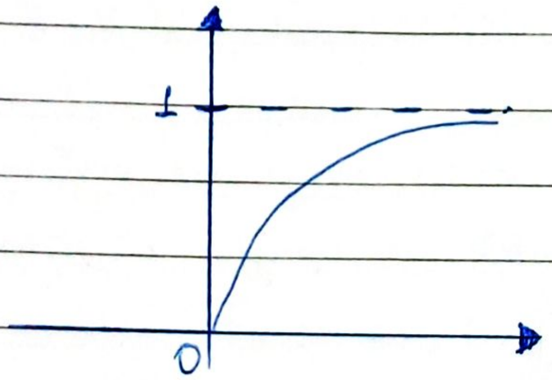
α) Έστω $x_1, x_2 \in [0,+\infty)$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow$

$1-e^{-x_1} < 1-e^{-x_2} \Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$

Άρα F_X αύξουσα.

β) $\lim_{x\to 0^+} F_X(x) = \lim_{x\to 0^+}(1-e^{-x}) = 0 = F_X(0)$

γ) $\lim_{x\to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim_{x\to +\infty} F_X(x) = 1$



ii)

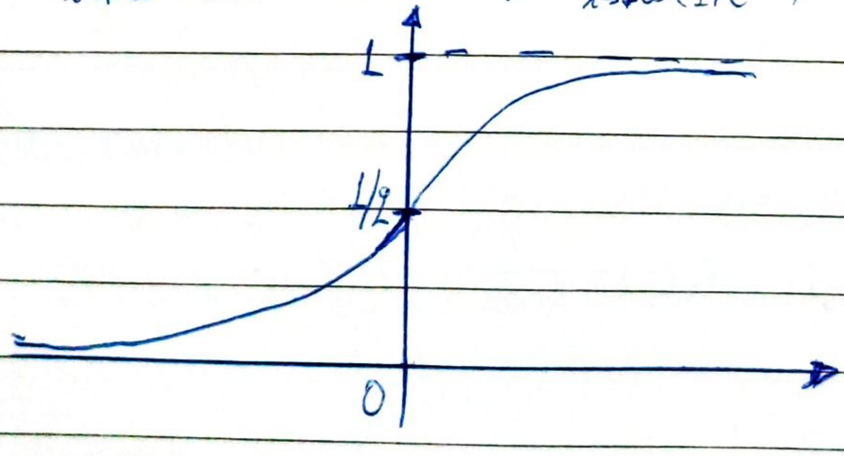
α) Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow e^{-x_1} > e^{-x_2} \Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x_1}} < \frac{1}{1+e^{-x_2}}$

$\Rightarrow F_X(x_1) < F_X(x_2)$

Άρα F_X αύξουσα

β) $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = \frac{1}{2} = F_X(0)$

γ) $\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = 0$, $\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right) = 1$



<u>Πρόταση:</u> Έστω τ.μ. X με ασκ F_X. Τότε για $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ισχύουν:

α) $P(\alpha < X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

β) $P(X < \beta) = F_X(\beta^-) \overset{\text{ορ}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} F_X(\beta - \frac{1}{n})$

γ) $P(X = \beta) = F_X(\beta) - F_X(\beta^-)$

δ) $P(X > \beta) = 1 - F_X(\beta)$

ε) $P(\alpha < X < \beta) = F_X(\beta^-) - F_X(\alpha)$

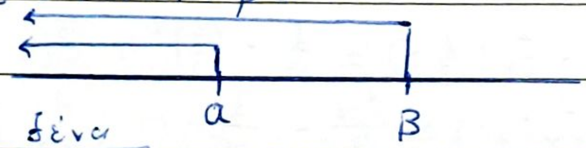
στ) $P(\alpha \leq X \leq \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha^-)$

ζ) $P(\alpha \leq X < \beta) = F_X(\beta^-) - F_X(\alpha^-)$

<u>Απόδειξη:</u>

α)

$\{X \leq \beta\} = \{X \leq \alpha\} \cup \{\alpha < X \leq \beta\}$



ξένα

$P(X < \beta) = P(\overbrace{(X \leq \alpha)} \cup \overbrace{(\alpha < X \leq \beta)}) = P(X \leq \alpha) + P(\alpha < X \leq \beta) =$

$= P(\alpha < X < \beta) = P(X < \beta) - P(X < \alpha) \overset{\text{ορ}}{=} F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

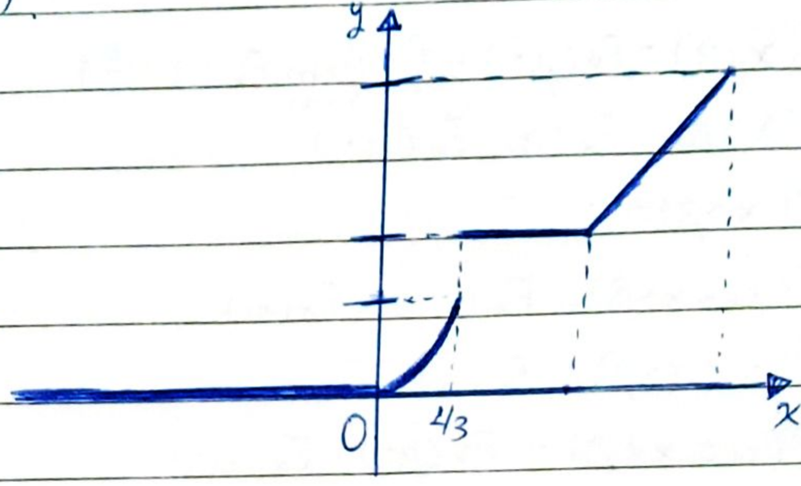
<u>Παρατήρηση:</u> Αν το β είναι σημείο συνέχειας της F_X, τότε (β) $\to P(X < \beta) = F_X(\beta)$ και (γ) $\to P(X = \beta) = 0$.

Επιπλέον, αν τα α, β είναι σημεία συνέχειας της F_X, τότε

$P(\alpha < X < \beta) - P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = F_X(\beta) - F_X(\alpha)$

<u>Άσκηση:</u>

Έστω η τ.μ. X με α.σ.κ. $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x < 1/3 \\ 1/4, & 1/3 \leq x < 2 \\ \frac{x-1}{4}, & 2 \leq x < 3 \\ 1, & 3 \geq x \end{cases}$. Να υπολογισθούν οι πιθανότητες: $P(\frac{1}{3} < x \leq 3)$, $P(x = \frac{1}{3})$, $P(x = 2)$, $P(1 < x < \frac{5}{2})$, $P(x < \frac{1}{3})$, $P(x = 3)$, $P(x > 2)$.



Λύση:

$\lim_{x \to 0^+} F_X(x) = F_X(0) = 0$.

$\lim_{x \to \frac{1}{3}^+} F_X(x) = F_X(\frac{1}{3}) = \frac{1}{4}$.

$\lim_{x \to 2^+} F_X(x) = F_X(2) = \frac{1}{4}$.

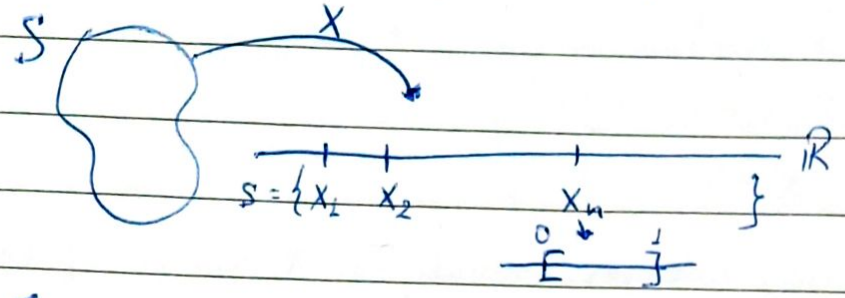
$\lim_{x \to 3^+} F_X(3) = 1$

- $P(\frac{1}{3} < X \leq 3) \overset{(\alpha)}{=} F_X(3) - F_X(\frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- $P(X = \frac{1}{3}) \overset{(\gamma)}{=} F_X(\frac{1}{3}) - F_X(\frac{1}{3}^-) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{5}{36}$
- $P(X = 2) \overset{(\gamma)}{=} F_X(2) - F_X(2^-) = \frac{2-1}{4} - \frac{1}{4} = 0$ (Αναμενόμενο γιατί το 2 είναι σημείο συνέχειας της F_X)
- $P(1 < X \leq \frac{5}{2}) \overset{(\sigma\tau)}{=} F_X(\frac{5}{2}) - F_X(1^-) = \frac{5/2 - 1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$
- $P(X < \frac{1}{3}) \overset{(\beta)}{=} F_X(\frac{1}{3}^-) = (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{9}$
- $P(X = 3) = F_X(3) - F_X(3^-) = 1 - \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$
- $P(X > 2) \overset{(\delta)}{=} 1 - F_X(2) = 1 - \frac{2-1}{4} = \frac{3}{4}$.

Διακριτή τ.μ και συνάρτηση πιθανότητας (σ.π)

- Διακριτή τ.μ είναι η τ.μ που παίρνει μεμονωμένες διακεκριμένες τιμές πεπ/νου ή αριθμήσιμου πλήθους.

Έστω X μια διακριτή τ.μ με σύνολο τιμών: $S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$



Σε κάθε τιμή x_i, $i=1,\dots,n$ της τ.μ X αντιστοιχεί μια πιθανότητα η $P(X=x_i)$, $i=1,\dots,n$.

Συνάρτηση πιθανότητας: $P_X(x_i) = P(X=x_i)$

• <u>Ορισμός:</u> Έστω διακριτή τ.μ. X με σύνολο τιμών $S_X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Η συνάρτηση $P_X : S_X \to [0,1]$ που ορίζεται με τύπο: $P_X(x_i) = P(X=x_i)$, $i=1,\dots,n$ ονομάζεται συνάρτηση πιθανότητας της διακριτής τ.μ X.

<u>Πρόταση (Ιδιότητες σπ):</u> Έστω διακριτή τ.μ X με σπ $P_X(x)$ Τότε:

α) $P_X(x) \geq 0$, $\forall$ τιμή x της τ.μ X

β) $\sum_x P_X(x) = 1$

Οι α), β) είναι απαραίτητες συνθήκες που πρέπει να ικανοποιούνται για να είναι μια συνάρτηση P_X συνάρτηση πιθανότητας

<u>Άσκηση:</u>

Έστω ένα νόμισμα με $P(K) = \frac{3}{8}$ και $P(\Gamma) = \frac{5}{8}$, το οποίο ρίχνεται εώς ότου εμφανιστεί K ή εώς ότου εμφανιστεί τρεις φορές Γ

α) Να προσδιοριστεί η σπ του αριθμού των απαιτούμενων ρίψεων του νομίσματος.

β) Να προσδιοριστεί η F_X.

<u>Λύση:</u>

α) Έστω X ο αριθμός των απαιτούμενων ρίψεων. Το X είναι τμ και ζητώ την σπ P_X.

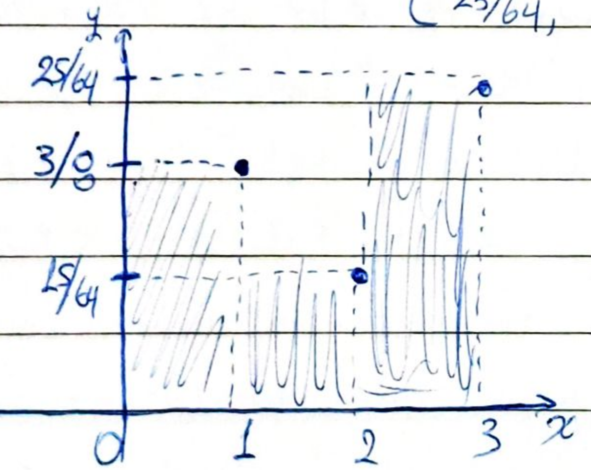
Οι τιμές της τμ X εξαρτώνται από $S=\{K, \Gamma K, \Gamma\Gamma K, \Gamma\Gamma\Gamma\}$

Άρα, οι τιμές της X είναι $x=1,2,3$

- $P_X(1)=P(X=1)=P(K)=3/8$
- $P_X(2)=P(X=2)=P(\Gamma K)=P(\Gamma)P(K)=\frac{3}{8}\,\frac{5}{8}=\frac{15}{64}$
- $P_X(3)=P(X=3)=P(\Gamma\Gamma K \text{ ή } \Gamma\Gamma\Gamma)=P(\Gamma\Gamma K)+P(\Gamma\Gamma\Gamma) \xrightarrow{ανεξ} P(\Gamma)P(\Gamma)P(K)+$
$+P(\Gamma)P(\Gamma)P(\Gamma)=\frac{25}{64}$.

Συνοπτικά:

$$P_X(x)=\begin{cases} 3/8, & x=1 \\ 15/64, & x=2 \\ 25/64, & x=3 \end{cases}$$



Γραφική παράσταση της P_X.
Ραβδόγραμμα

β) Έστω $x\in(-\infty,1)$. Τότε $F_X(x)=P(X\le x)=P(\emptyset)=0$

Έστω $x\in[1,2)$. Τότε $F_X(x)=P(X=1)=3/8$

Έστω $x\in[2,3)$. Τότε $F_X(x)=P(X=1 \text{ ή } X=2)=39/64$.

Έστω $x\in[3,+\infty)$. Τότε $F_X(x)=P(X=1 \text{ ή } X=2 \text{ ή } X=3)=1$

Συνοπτικά:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 &, x < 1 \\ 3/8 &, 1 \leq x < 2 \\ 39/64 &, 2 \leq x < 3 \\ 1 &, 3 \leq x \end{cases}$$